ENSEMBLES

Un ensemble est une « collection d'objets de notre pensée», comme le disait le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), inventeur du concept. Son idée géniale était de comparer les ensembles infinis. Ensuite, la notion a servi de fondement aux mathématiques modernes. Il y a d'autre façons d'unifier les mathématiques, mais la *théorie de ensembles* est la plus courante. Le mathématicien David Hilbert (1862-1943) dira : « Nul ne doit nous chasser du Paradis que Cantor a créé ».

I. GÉNÉRALITÉS

APPARTENANCE

Un **ensemble** est correctement défini lorsqu'on sait exactement quels **éléments** lui **appartiennent**. Deux ensembles sont égaux <u>si, et seulement s'</u>ils contiennent les mêmes éléments. (Ici, « *E contient a* » signifie que l'élément a appartient à l'ensemble E).

EXEMPLES

Une droite, un cercle, plus généralement une figure, sont des *ensembles* de points. On peut tout aussi bien créer des ensembles dont les éléments soient des nombres. Plus généralement, tout objet mathématique peut se retrouver élément d'un ensemble, même un autre ensemble. Mais il y a des *axiomes* qui limitent les possibilités, afin d'éviter des paradoxes. L'ensemble de tous les ensembles appartient-il à lui-même ? Et à supposer qu'on s'en accommode, il reste un problème, appelé *paradoxe de Russell* : l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ? ».

Bertrand Russell (1872-1970) est un mathématicien et philosophe britannique.

NOTATION

$a \in E$ « a appartient à E » (ou parfois « a appartenant à E »).

$a \notin E$ « a n'appartient pas à E. »

À gauche du signe « $\in$ », il y a un *élément* et à droite un *ensemble*. (À ceci près qu'un ensemble peut être aussi un élément, objecteront ceux qui vont vite à la contradiction.)

DÉTERMINATIONS

On peut exprimer un ensemble :

En extension : en écrivant la liste de tous les éléments qui lui appartiennent (l'ordre dans lequel ils apparaissent n'a aucune importance). On encadre la liste d'*accolades* et l'on sépare les éléments par des points-virgules. Exemple : $E=\{0;2;4;6;8\}$

En compréhension : par une affirmation mathématique permettant de savoir exactement quels éléments appartiennent à l'ensemble. Exemple : l'ensemble E de l'exemple précédent pourrait se décrire ainsi : « soit E l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 ».

CARDINAL

Un ensemble **fini** est un ensemble qui *contient* un nombre fini d'éléments. Le nombre des éléments se nomme le **cardinal** de l'ensemble. On le note « $\text{Card}(E)$ » (et on lit : « cardinal de E »). Exemple : $\text{Card}\left(\left\{8;0;\frac{1}{7}\right\}\right)=3$.

Il existe <u>un</u> ensemble à *zéro* éléments, il se nomme l'**ensemble vide** et on le note : $\varnothing$. Un ensemble à 1 élément se nomme un **singleton**. Un ensemble à 2 éléments se nomme une **paire**. A ma connaissance, un ensemble à trois éléments n'a pas de nom. Je propose le mot « **triade** ».

PAIRE/COUPLE

Une *paire* étant un ensemble, l'ordre dans lequel on écrit ses éléments n'a aucune importance : $\{a;b\}=\{b;a\}$. De plus, un même élément ne peut appartenir plusieurs fois à une paire (il appartient ou n'appartient pas, c'est tout).

Il existe un concept ressemblant mais bien distinct, le **couple**, qui n'est pas un ensemble, mais que nous étudions ici par commodité. Dans un *couple*, comme dans un paire, il y a deux « éléments », que nous nommerons plutôt **termes** pour bien faire la distinction. Mais contrairement aux ensembles, l'ordre a une importance et la répétition est autorisée. Pour noter un couple, on utilise des parenthèses à la place des accolades.

	Paire	Couple
Notation	$\{a;b\}$	$(a;b)$
Ordre	$\{a;b\}=\{b;a\}$	$(a;b)\neq(b;a)$
Répétition	$\{a;a\}$ n'existe pas	$(a;a)$ existe

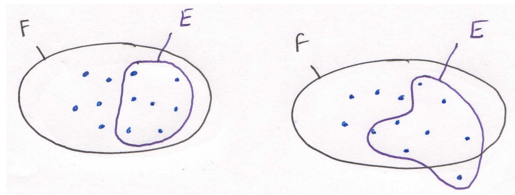
Un *couple* peut servir par exemple à noter les coordonnées d'un point du plan, ou une solution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Le concept correspondant au couple, mais avec trois *termes* se nomme un **triplet**. Par exemple $(5;2;3)$. (Puis quadruplet, quintuplet… On parle d'une façon générale de « n-uplets »)

II. LA RELATION D'INCLUSION

DÉFINITION

Un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F si et seulement si tout élément de E appartient aussi à F. On dit aussi que : E est une **partie** de F ou encore que E est un **sous-ensemble** de F



E est inclus dans F E n'est pas inclus dans F

REMARQUES

Tout ensemble est inclus dans lui-même.

L'ensemble vide est *inclus* dans tous les ensembles.

Un ensemble est toujours inclus dans lui-même.

On dit parfois que F *contient* E pour dire que E est inclus dans F. Mais il y a alors ambiguïté, puisque « contenir » peut s'entendre aussi bien au sens de l'appartenance que de l'inclusion. Si le contexte n'y suffit pas, il faudra préciser en quel sens on entend le verbe « contenir ».

NOTATION

$E\subset F$ « E est inclus dans F »

ENSEMBLE DES PARTIES

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E se note $\mathcal{P}(E)$ et se lit « $\mathcal{P}$ de E ». C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Exemple :

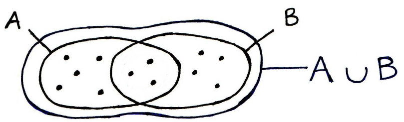
si $E=\{a;b\}$, alors : $\mathcal{P}(E)=\{\ \varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{a;b\}\ \}$

III. OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Soient A et B deux ensembles.

RÉUNION

On note $A\cup B$ (« A **union** B ») l'ensemble *contenant* (au sens de l'appartenance) tous les éléments de A et aussi tous les éléments de B.



Pour tout x, $\boxed{x\in A\cup B \iff (x\in A \text{ ou } x\in B)}$

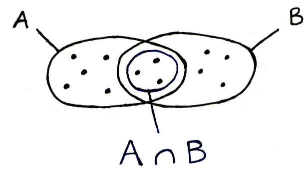
$\Leftrightarrow$: « équivaut à ». A le même sens qu'un « si, et *seulement* si ».
Le *ou* mathématique est « *non exclusif* » : c'est un « *ou* ou *et* ».

EXEMPLE

Si $A=\{a;b;c\}$ et si $B=\{b;c;d\}$, alors $A\cup B=\{a;b;c;d\}$

INTERSECTION

On note $A\cap B$ (« A **inter** B ») l'ensemble contenant les éléments étant chacun présent à la fois dans A et dans B. Si $A\cap B=\varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.



Pour tout x, $\boxed{x\in A\cap B \iff (x\in A \text{ et } x\in B)}$

EXEMPLE

Si $A=\{a;b;c\}$ et si $B=\{b;c;d\}$, alors $A\cap B=\{b;c\}$

DIFFÉRENCE

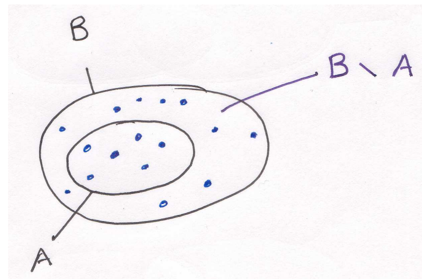
Si $A\subset B$, on définit la **différence** ensembliste $B\setminus A$ (« B <u>privé de</u> A ») par l'affirmation :

Pour tout x, $x\in B\setminus A \iff (x\in B \text{ et } x\notin A)$

On part donc de l'ensemble B et on lui retire tous les éléments qui appartiennent à A.

$B\setminus A$ se nomme aussi le **complémentaire** de A dans B.

S'il est clair qu'un ensemble E est l'ensemble de référence dans lequel on se place d'office, le complémentaire de A (dans E) peut se noter $\overline{A}$.



EXEMPLE

si $B=\{a;b;c;d;e\}$ et $A=\{a;c;e\}$, alors $B\setminus A=\{b;d\}$.

PRODUIT CARTÉSIEN

Soient E et F deux ensembles. $E\times F$ (« E <u>croix</u> F ») est l'ensemble de tous les <u>couples</u> dont le premier terme appartient à E et le second à F.

EXEMPLE

si $E=\{a\}$ et $F=\{j;k\}$, alors $E\times F=\{(a;j);(a;k)\}$

E^2 est une façon d'écrire $E \times E$. C'est l'ensemble de tous les couples dont les termes appartiennent à E.

Sur le même principe, E^3 est l'ensemble des triplets dont les termes appartiennent tous à E. Etc.

IV. Les ensembles de nombres

1. Les grandes catégories de nombres

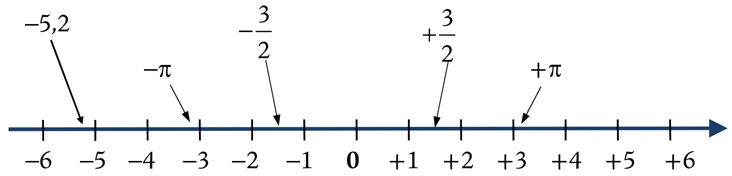
$\mathbb{N}$ — $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.
$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;........\}$

$\mathbb{Z}$ — $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**.
$\mathbb{Z} = \{.......;-3;-2;-1;0;1;2;3;.......\}$

$\mathbb{D}$ — $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres **décimaux**.
Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale est finie.
Exemples : $145 \in \mathbb{D}$ $\quad 1{,}111\overline{1}... \notin \mathbb{D}$

$\mathbb{Q}$ — $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres **rationnels**.
Un nombre rationnel est un nombre qu'on peut écrire sous forme de fraction (éventuellement précédée d'un « – ») ; autrement dit comme **q**uotient de deux entiers (relatifs).

$\mathbb{R}$ — $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels**. (Ou : ensemble des réels)



Les *réels* sont tous les nombres qui peuvent être représentés sur un *axe*. Une fois choisis une origine, un sens de parcours et une unité de longueur, chaque point d'une droite correspond à un unique réel et chaque réel à un unique point de la droite. Il existe d'autres sortes de nombres, par exemple les nombres *imaginaires*, qui ne sont pas représentés sur cet axe ; mais on ne les rencontre pas avant la terminale. En attendant, si l'on parle de « nombre » sans autre précision, on entend nombre réel.
(Cette représentation des réels sur une droite s'appelle **axe des réels** ou encore **droite numérique**.)

REMARQUE — Vous devez à présent pouvoir justifier précisément la suite d'inclusions suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. L'irrationalité

ORTHOGRAPHE

On écrit « i**rr**atio**n**alité », mais « i**rr**atio**nn**el » (deux « n »)

DÉFINITION — Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.
Donc l'ensemble des nombres irrationnels peut s'écrire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

EXEMPLES $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

C'est probablement le premier cas d'irrationalité qui se soit présenté à l'esprit humain (dès le temps de Pythagore).

π aussi est un nombre irrationnel. L'irrationalité de π fut démontrée en 1761 par le mathématicien Johann-Heinrich Lambert. Cette démonstration est assez difficile et ne peut être abordée avant le bac. En revanche, vous pouvez dès à présent comprendre une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. C'est intéressant, mais il faut s'accrocher un peu.

DÉMONSTRATION DE L'IRRATIONNALITÉ DE $\sqrt{2}$

En **lemme**, démontrons qu'un nombre dont le carré est pair est lui-même forcément pair, c'est-à-dire, si l'on prend la **contraposée**, que le carré d'un nombre impair est forcément impair. Un nombre impair (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas pair) peut toujours s'écrire comme le successeur d'un nombre pair. Or les nombres pairs sont ceux qui se mettent sous la forme $2p$, où p est un entier. Donc un nombre impair peut s'écrire, lui, sous la forme $2p+1$, où p est un entier. Or $(2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. On a donc mis le carré du nombre impair considéré sous la forme $2k+1$, où k est un entier (ici en posant $k = 2p^2 + 2p$). Ce carré est donc impair.

À présent, raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors on pourrait l'écrire sous forme de fraction. On pourrait alors simplifier cette fraction de sorte qu'elle soit irréductible. Il existerait donc deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et que p et q n'aient pas de diviseur commun. Mais alors on aurait :

$$\sqrt{2} \times q = p$$

donc $\left(\sqrt{2} \times q\right)^2 = p^2$

donc $2q^2 = p^2$ **(1)**

Donc p^2 est un nombre pair. Donc, par le *lemme*, p est pair aussi. On peut donc écrire p sous la forme $2k$, où k est un entier. En reprenant l'égalité (**1**), on obtient :

$$2q^2 = (2k)^2$$

donc $2q^2 = 4k^2$

donc $q^2 = 2k^2$

Donc q aurait un carré pair. Par conséquent, en utilisant derechef le *lemme*, q serait pair. Donc p et q serait pair. Donc la fraction $\frac{p}{q}$ serait réductible, ce qui est contradictoire.

THÉORÈME Un nombre est rationnel ssi son écriture décimale est finie ou *périodique*.

REMARQUES

« ssi » est une abréviation de « si**,** et *seulement* si ».

« périodique » signifie qu'une succession de chiffre se répète à l'infini. Par exemple : $8{,}976\ 120\ 120\ \overline{120}\ldots$

DÉMONSTRATION

L'idée centrale de la démonstration est donnée par les exercices 31 et 32.

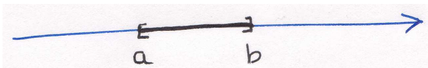
3. LES INTERVALLES

PRÉSENTATION

Un intervalle est ce qui est compris entre deux *bornes*. Dans un sens plus large, en mathématiques, les **intervalles** sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui se représentent d'un seul tenant (on dit qu'ils sont *connexes*) sur *l'axe des réels*. On les note à l'aide de crochets, par analogie avec les segments. On « ouvre » un crochet (on le « tourne vers l'extérieur ») pour dire que la *borne* n'est pas comprise dans l'ensemble.

Il y a 9 sortes d'intervalles. Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$.

$[a;b]$ L'intervalle $[a;b]$ est l'ensemble de tous les réels compris entre a et b (a et b inclus). Il contient donc une infinité d'éléments (sauf si $a = b$), contrairement à la paire $\{a;b\}$ qui n'en contient que deux. C'est un intervalle dit **fermé**. Sur l'axe des réels, il est représenté par un segment :



Pour tout réel x : $x \in [a;b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

$[a;b[$ $x \in [a;b[\Leftrightarrow a \leq x < b$

$]a;b]$ $x \in]a;b] \Leftrightarrow a < x \leq b$

} intervalles **semi-ouverts**

$]a;b[$ $x \in]a;b[\Leftrightarrow a < x < b$ intervalle **ouvert**

On considère encore comme des intervalles, les sous-ensembles *connexes* de qui se prolonge à l'infini :

$[a;+\infty[$ $x \in [a;+\infty[\Leftrightarrow a \leq x$

$]a;+\infty[$ $x \in]a;+\infty[\Leftrightarrow a < x$

$]-\infty;b]$ $x \in]-\infty;b] \Leftrightarrow x \leq b$

$]-\infty;b[$ $x \in]-\infty;b[\Leftrightarrow x < b$

$]-\infty;+\infty[$ $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Dans ces expressions, les signes « $-\infty$ » et « $+\infty$ » sont juste des notations faisant partie d'un tout, mais ne représentant en eux-mêmes aucun objet mathématique.

REMARQUE

Les *singletons* sont des *intervalles* : $\{a\} = [a;a]$

L'*ensemble vide* est un *intervalle* : $\varnothing =]a;a[$

On peut ainsi donner une définition générale de l'intervalle :

Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi :

$\forall x,y \in I \,;\, \forall a \in \mathbb{R} \,;\, x \leq a \leq y \Rightarrow a \in I$

($\forall$ se lit « quel que soit… »)

a et b sont appelées les **bornes** des intervalles.

NOTATIONS

$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[\qquad \mathbb{R}_- =]-\infty;0]$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.)

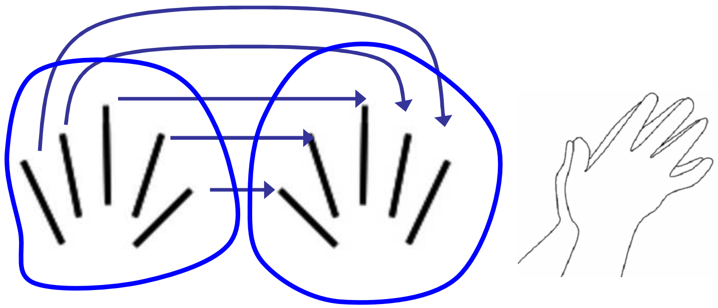
$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[\qquad \mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$

Prononciation : « R plus », « R étoile », « R plus étoile », etc.

V. Les ensembles infinis

Dans ce supplément hors programme, on veut donner un aperçu du « paradis » créé par Cantor.

Bijection Si l'on ne sait pas compter et qu'on souhaite vérifier qu'on a le même nombre de doigts à chaque main, il suffit de les associer deux à deux : chaque doigt de la main gauche à un unique doigt de la main droite. S'il ne reste aucun doigt tout seul, on a formé entre les deux ensembles de doigts une « correspondance biunivoque », comme disait Cantor. Aujourd'hui, on appelle cela une **bijection**.



Une bijection peut être définie comme une *fonction* dont tous les éléments de *l'ensemble d'arrivée* admettent un unique *antécédent*. (Voir chapitre Fonctions I, pour le sens des mots en italique.)

Cardinaux infinis

Muni de ce simple outil, on peut comparer des tailles d'ensembles infinis : on dira que deux ensemble infinis ont même *cardinal* lorsqu'on peut les mettre en *bijection*. Les ensembles infinis ne se valent pas tous. Par exemple, il est impossible de mettre en bijection $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$: le cardinal de $\mathbb{R}$ est plus grand que celui de $\mathbb{N}$.

Exemple Si l'on retire un élément à un ensemble infini, on ne change pas le cardinal de l'ensemble. Par exemple, $\mathbb{N}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}^*$. Il suffit, à chaque entier d'associer son successeur.

Questions

Et si l'on enlève « la moitié » des éléments ? Est-ce que, par exemple l'ensemble des entiers naturels peut être mis en *bijection* avec l'ensemble des entiers pairs ?

Deux segments de taille différente (qui sont donc des ensembles de points) peuvent-ils être mis en *bijection* ?

Un segment peut-il être mis en bijection avec une droite ? Et avec une surface ?

VI. Glossaire

lemme Résultat intermédiaire qu'on démontre afin de l'utiliser dans la démonstration d'un théorème.

contraposée La contraposée de « si P alors Q » est « si non Q alors non P ». Une implication est équivalente à sa contraposée.

5